Sveučilište u Zagrebu
Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije
Zavod za matematiku

Kolegij: Matematičke metode u KI

Fourierovi Redovi i Integrali

Studentice: Ana Jasak
Danica Šabić
ak. god. 2007/2008.

Sadržaj:

Uvod

Periodne funkcije koje se javljaju pri rješavanju inženjerskih problemima često su relativno komplicirane, stoga je poželjno prikazati ih kao jednostavne periodne funkcije. Fourierovi redovi rastavljaju periodnu funkciju na zbroj jednostavnih funkcija, sinusa i kosinusa.

Uveo ih je veliki francuski fizičar Joseph Fourier (1768-1830), kako bi riješio bilancu topline metalne ploče. Njegovo otkriće dovelo je do revolucije u matematici, matematičari su bili prisiljeni ponovno preispitati temelje matematike, što je pak rezultiralo brojnim modernim teorijama.

Bilanca topline je parcijalna diferencijalna jednadžba. Fourierovi prethodnici nisu mogli općenito riješiti tu jednadžbu iako su mogli doći do točnog rješenja ukoliko se izvor topline ponašao jednostavno, što se moglo lako opisati pomoću valnih funkcija, sinusa i kosinusa. Fourierova ideja je bila da izvede model za kompliciraniji izvor topline kao superpoziciju (ili linearnu kombinaciju) jednostavnih valnih funkcija sinusa i kosinusa, te da zapiše rješenje kao superpoziciju odgovarajućih rješenja. Ova superpozicija ili linearna kombinacija naziva se Fourierov red.

Iako je početna namjera bila rješavanje bilance topline, poslije se pokazalo da se isti način rješavanja jednadžbi može primijeniti na veliko područje matematičkih i fizikalnih problema. Dobivena rješenja je vrlo lako shvatiti, koristeći moderne teorije.

Fourierov redovi nalaze brojne primjene u elektroinženjerstvu, vibracijskim analizama, akustici, optici itd.

1. Periodne funkcije. Trigonometrijski redovi

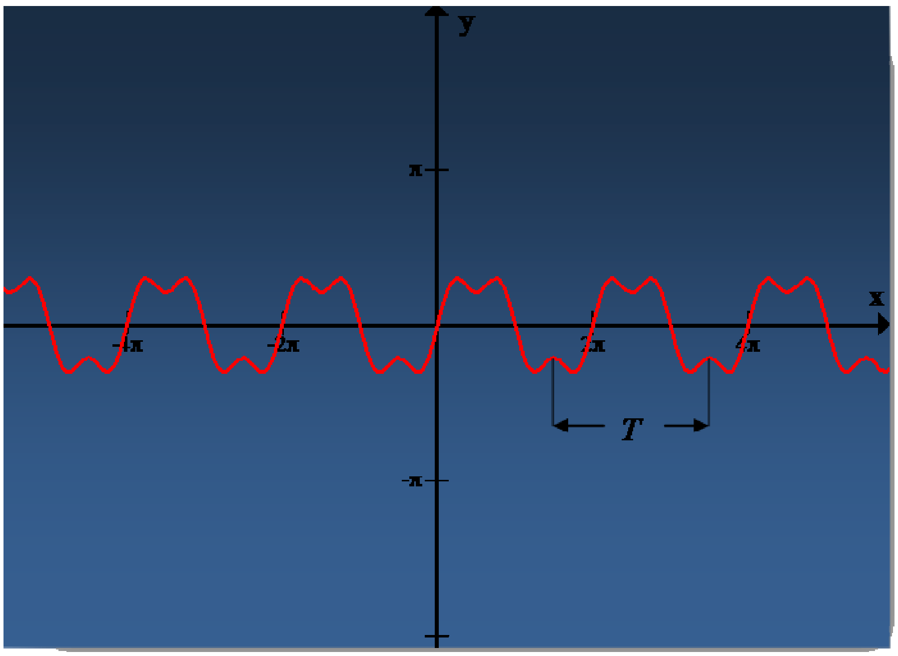
Funkcija $f(x)$ je ***periodna*** ako je definirana za svaki realni x i ako postoji pozitivni broj T za koji vrijedi:

$$f(x+T) = f(x) \tag{1.1}$$

za svaki x koji je element skupa $\mathcal{R}$, realnih brojeva.

Broj T se tada zove period[1] funkcije $f(x)$.

Grafovi takve funkcije dobivaju se periodičnim ponavljanjem grafa u bilo kojem intervalu duljine T



slika 1: Periodna funkcija

Iz (1.1) slijedi da, za bilo koji cijeli broj n vrijedi:

$$f(x+nT) = f(x) \quad \text{za svaki } x.$$

Tako da je svaki višekratnik, $nT(n \neq 0)$ od T također period. Nadalje, ako $f(x)$ i $g(x)$ imaju period T, onda funkcija

$$h(x) = af(x) + bg(x), (a, b = konstanta)$$

ima period T.

Poznati primjeri periodnih funkcija su sinus i kosinus funkcije. Funkcija $f = c = const$ je također po definiciji periodna funkcija jer zadovoljava (1.1) za svaki pozitivni T.

[1] Najmanji pozitivni period T funkcije $f(x)$, koji nije konstantan često se naziva primitivni period funkcije $f(x)$.

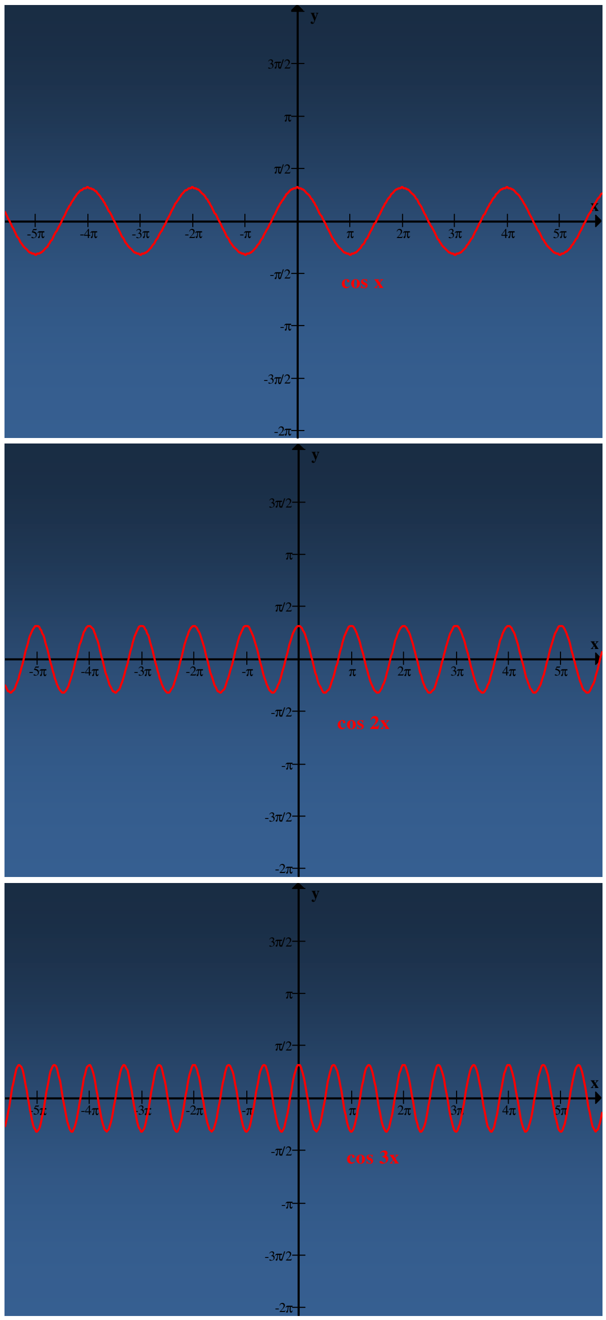
Naš problem bit će predstavljanje različitih funkcija sa periodom 2π kao što su:

$$\cos x\,, \sin x\,, \qquad \cos 2x\,, \sin 2x\,, \ldots, \cos nx\,, \sin nx\,, \ldots$$

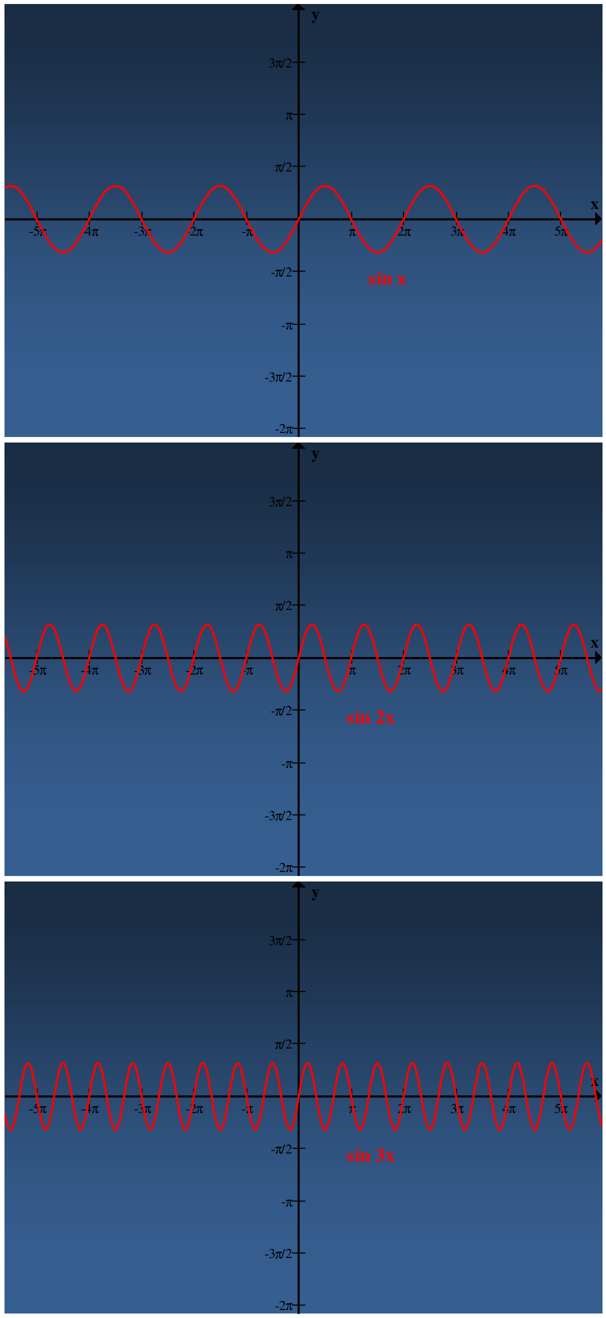
Redovi koji se javljaju su u obliku:

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots \tag{1.2}$$

gdje su $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ realne konstante nazivaju se ***trigonometrijski redovi***, a a_n i b_n zovu se koeficijenti redova. Vidljivo je da svaki član reda ima period 2π. Iz toga slijedi, ako red konvergira suma će biti funkcija s periodom 2π.



slika 2: Kosinus funkcije s različitim periodima



slika 3: Sinus funkcije s različitim periodima

Periodne funkcije koje se javljaju u inženjerskim problemima često su relativno komplicirane, stoga je poželjno prikazati ih kao jednostavne periodne funkcije. Vidjet ćemo da se gotovo sve periodne funkcije $f(x)$ perioda 2π, koje se javljaju u nastavku, mogu prikazati pomoću trigonometrijskih redova, a koeficijenti dani s (1.2) u terminima funkcije $f(x)$.

2. Fourierovi redovi. Eulerove formule

Pretpostavimo da je $f(x)$ periodna funkcija s periodom 2π, koja se može prikazati trigonometrijskim redom

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2.1}$$

U (2.1) želimo odrediti koeficijente a_n i b_n. Najprije određujemo a_0. Integriranjem na obje strane u granicama od $-\pi$ do π dobijemo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right] dx$$

Integriranjem član po član dobivamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx\right)$$

Prvi član na desnoj strani jednak je $2\pi a_0$, dok su ostali integrali jednaki nuli, što se može lako utvrditi izračunavanjem integrala. Dakle, provedbom integracije dobivamo:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \tag{2.2}$$

područje ispod krivulje $f(x)$ od $-\pi$ do π, podijeljeno s 2π.

Zatim se koeficijenti $a_1, a_2, \ldots$ određuju na sličan način. Množimo (2.1) s $\cos mx$, gdje je m bilo koji fiksni pozitivni cijeli broj i integriranjem u granicama od $-\pi$ do π dobijemo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right]\cos mx\, dx \tag{2.3}$$

Integriranjem član po član desna strana postaje jednaka:

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\, dx\right]$$

Prvi integral i zadnji integral jednaki su nuli zato jer je podintegralni izraz neparna funkcija. Primjenjujući svojstva parnosti i neparnosti funkcije na drugi integral dobijemo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x\, dx$$

U ovoj formuli, prvi integral na desnoj strani je nula za svaki m i n koji se uzmu u obzir. Zadnji integral jednak je nuli kad vrijedi $n \neq m$, odnosno jednak je π za $n = m$. Proizlazi da je desna strana u (2.3) jednaka $a_m\pi$ i dobije se:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx, \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

Na kraju, iz (2.1) određujemo $b_1, b_2, \ldots$ .Ako (2.1) pomnožimo sa $\sin mx$, gdje je m bilo koji fiksni pozitivni cijeli broj, i integriramo u granicama od $-\pi$ do π dobijemo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)\right]\sin mx\,dx \qquad (2.5)$$

Integriranjem član po član desna strana postaje:

$$a_0\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx\right]$$

Prvi integral je jednak nuli. Sljedeći integral je poput već razmatranih i ustanovljeno je da je nula za svaki $n = 1,2,\ldots$. Posljednji integral se može transformirati, primjenjujući svojstva parnosti i neparnosti funkcije, u:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)x\,dx$$

Posljednji član ovog integrala je nula. Prvi član na desnoj strani je nula kada je $n \neq m$ i jednak je π za $n = m$. Kako se u (2.5) ovaj član množi sa b_m desna strana postaje jednaka $b_m\pi$ te se na kraju dobije:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx, \qquad m = 1,2,\ldots$$

Pišujući n umjesto m u ovu formulu i u (2.4) dobiju se takozvane ***Eulerove formule***:

(a) $\quad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$

(b) $\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad n = 1,2,\ldots$ (2.6)

(c) $\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

Pomoću periodne funkcije $f(x)$ sa zadanim periodom 2π možemo izračunati koeficijente a_n i b_n koristeći (2.6) i formirati trigonometrijski red:

$$a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + \cdots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \cdots \qquad (2.7)$$

Ovaj red se tada naziva Fourierov red i odgovara $f(x)$ te njenim koeficijentima dobivenim iz (2.6) i nazvanim Fourierovi koeficijenti funkcije $f(x)$.

<u>Napomena:</u> Zbog periodičnosti podintegralnih funkcija interval integracije u (2.6) može se zamijeniti bilo kojim intervalom duljine 2π, primjerice intervalom $0 \leq x \leq 2\pi$.

Iz definicije određenog integrala slijedi da ako je funkcija $f(x)$ neprekidna ili samo po dijelovima neprekidna, onda integrali u (2.6) postoje i možemo izračunati Fourierove koeficijente funkcije $f(x)$.

Teorem 1: Ako je periodna funkcija $f(x)$ s periodom 2π djelomično neprekinuta u intervalu $-\pi \leq x \leq \pi$ i ima lijevu i desnu derivaciju u svakoj točki intervala, onda je odgovarajući Fourierov red (s koeficijentima danim s (2.6)) konvergentan.

Primjedba: Ako Fourierov red koji odgovara funkciji $f(x)$ konvergira i ima sumu $f(x)$, kako je opisano u Teoremu 1, red će se zvati Fourierov red funkcije $f(x)$ te možemo pisati:

$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots$

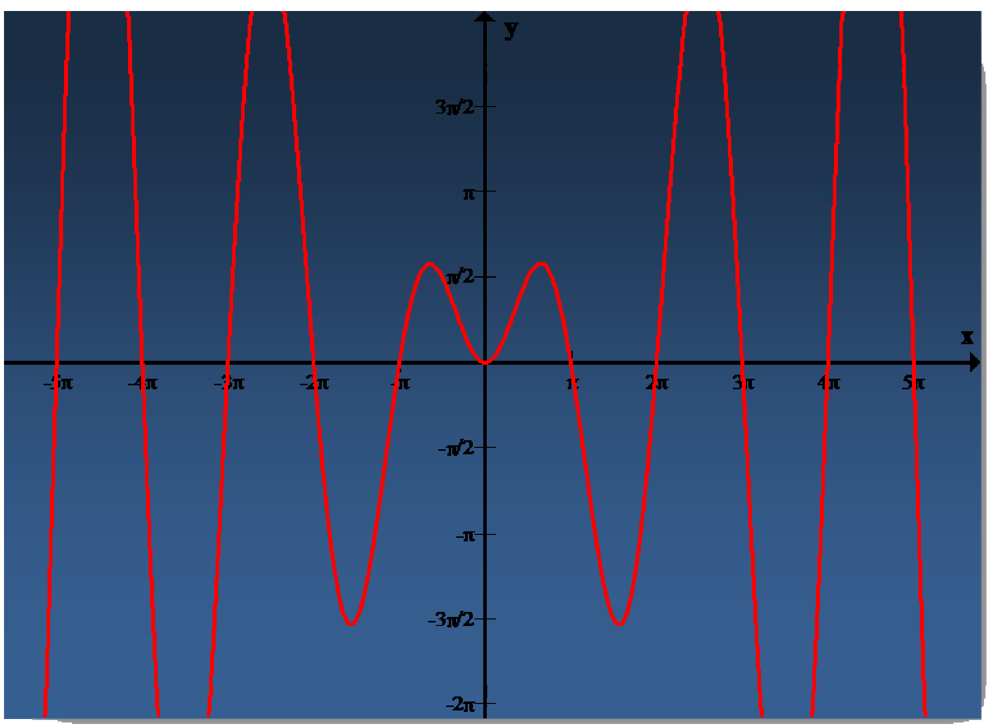
Možemo reći da je funkcija $f(x)$ prikazana ovim Fourierovim redom. Kako je ovaj niz konvergentan, i novodobiveni red imat će sumu jednaku sumi originalnog reda pa možemo pisati:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

3. Parne i neparne funkcije

Funkcija $y = g(x)$ je ***parna*** ako je:

$$g(-x) = g(x) \qquad \text{za svaki } x.$$

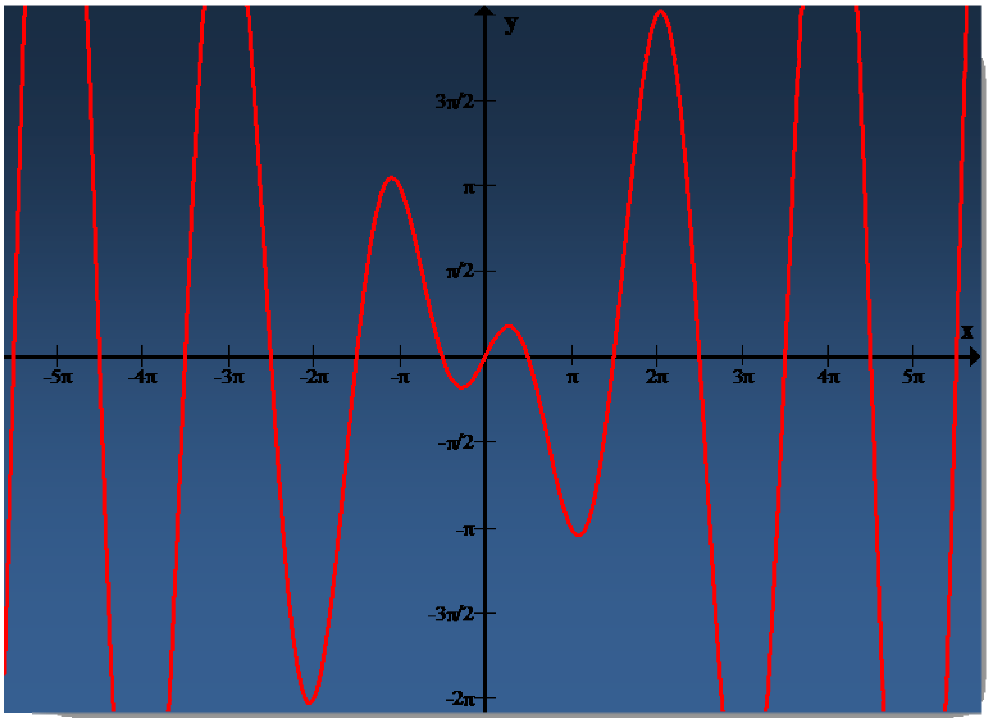


slika 4: Parna funkcija

Graf parne funkcije je simetričan s obzirom na os y.

Funkcija $h(x)$ je ***neparna*** ako vrijedi:

$$h(-x) = -h(x) \qquad \text{za svaki } x.$$



slika 5: Neparna funkcija

Funkcija $\cos nx$ je parna, dok je funkcija $\sin nx$ neparna.

Ako je $g(x)$ parna funkcija, vrijedi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} g(x)dx \tag{3.1}$$

Ako je $h(x)$ neparna funkcija vrijedi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x)dx = 0 \tag{3.2}$$

Umnožak $q = gh$ parne funkcije g i neparne funkcije h je neparna funkcija jer vrijedi:

$$q(-x) = g(-x)h(-x) = g(x)[-h(x)] = -q(x)$$

Dakle, ako je $f(x)$ parna funkcija, onda je $f \sin nx$ u (2.6c) neparna funkcija i $b_n = 0$ za sve n. Slično, ako je $f(x)$ neparna funkcija, onda je $f \cos nx$ u (2.6b) neparna funkcija i $a_n = 0$ za sve n.

Teorem 1: Fourierov red parne periodne funkcije $f(x)$ s periodom 2π je ***kosinusni Fourierov red***:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad (f \text{ je parna funkcija}) \tag{3.3}$$

s koeficijentima:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \qquad n = 1,2, \ldots \tag{3.4}$$

Fourierov red neparne periodne funkcije $f(x)$ s periodom 2π je ***sinusni Fourierov red***:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad (f \text{ je neparna funkcija}) \tag{3.5}$$

s koeficijentima:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \tag{3.6}$$

Teorem 2: Fourierovi koeficijenti sume $f_1 + f_2$ su jednaki sumi odgovarajućih Fourierovih koeficijenata funkcija f_1 i f_2.

4. Funkcije koje imaju proizvoljan period

Prijelaz s funkcija koje imaju period 2π na funkcije s bilo kojim periodom T je prilično jednostavan zbog toga što se može provesti promjenom skale.

Naime, ako pretpostavimo da funkcija $f(t)$ ima period T onda možemo uvesti novu varijablu x tako da $f(t)$, kao funkcija od x ima period 2π. Ako stavimo:

$$t = \frac{T}{2\pi}x \qquad \text{tako da bude:} \qquad x = \frac{2\pi}{T}t \tag{4.1}$$

onda $x = \pm\pi$ odgovara $t = \pm T/2$, što znači da f kao funkcija od x ima period 2π, prema tomu Fourierov red je:

$$f(t) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{4.2}$$

Koeficijenti reda dobivaju iz (2.6) u obliku:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\sin nx\, dx$$

Ove formule možemo upotrijebiti izravno, međutim, transformacija u t pojednostavljuje računanje. Kako je:

$x = \frac{2\pi}{T} t$, imamo $dx = \frac{2\pi}{T} dt$

i interval integracije odgovara intervalu $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$

Prema tome, upotrebljavamo Eulerove formule:

(a) $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt$

(b) $a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \frac{2n\pi t}{T}\, dt, \quad n = 1,2,\dots$ (4.3)

(c) $b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \frac{2n\pi t}{T}\, dt$

za izračunavanje Fourierovih koeficijenata funkcije $f(t)$. Fourierov red (4.2) s x izraženim preko t postaje:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} t \right) \quad (4.4)$$

Interval integracije u (4.3) moguće je zamijeniti s bilo kojim intervalom duljine T, primjerice intervalom $0 \leq t \leq T$.

Teorem 1: Fourierov red parne funkcije $f(t)$ s periodom T je kosinusni Fourierov red:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t \qquad (f \text{ je parna funkcija}) \quad (4.5)$$

s koeficijentima:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt, \qquad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos \frac{2n\pi}{T} t\, dt, \qquad n = 1,2,\dots \quad (4.6)$$

Fourierov red neparne funkcije $f(t)$ s periodom T je sinusni Fourierov red:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2n\pi}{T} t \qquad (f \text{ je neparna funkcija}) \quad (4.7)$$

s koeficijentima:

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin \frac{2n\pi}{T} t\, dt \quad (4.8)$$

5. Poluperiodno proširenje reda

Imamo funkciju $f(t)$ s periodom $T = 2l$. Funkcija je parna i iz Teorema 1 nalazimo kosinusni Fourierov red:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} t \qquad (f \text{ je parna funkcija}) \tag{5.1}$$

s koeficijentima:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(t)dt, \qquad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(t) \cos\frac{n\pi}{l} t\, dt, \qquad n = 1,2,\ldots \tag{5.2}$$

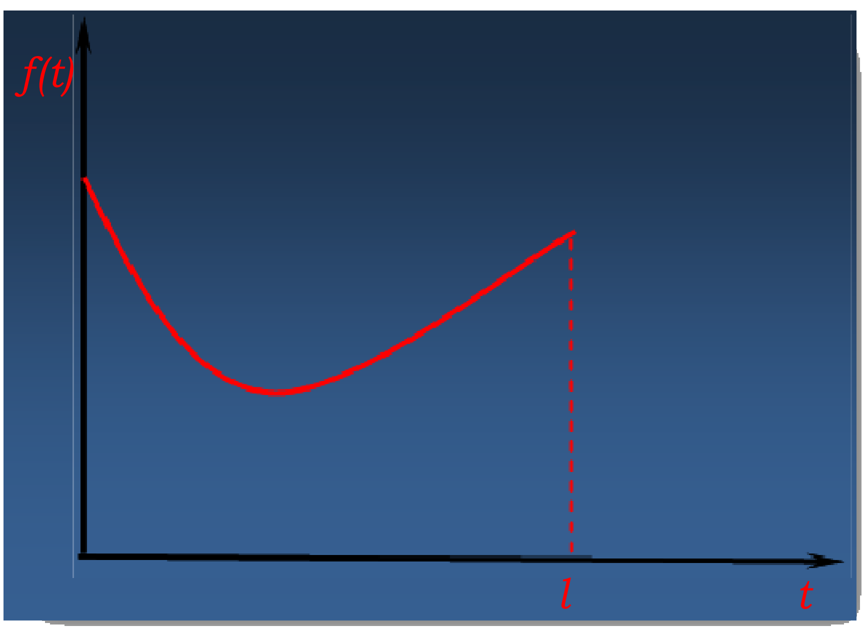
Ako je f neparna funkcija dobivamo sinusni Fourierov red:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l} t \qquad (f \text{ je neparna funkcija}) \tag{5.3}$$

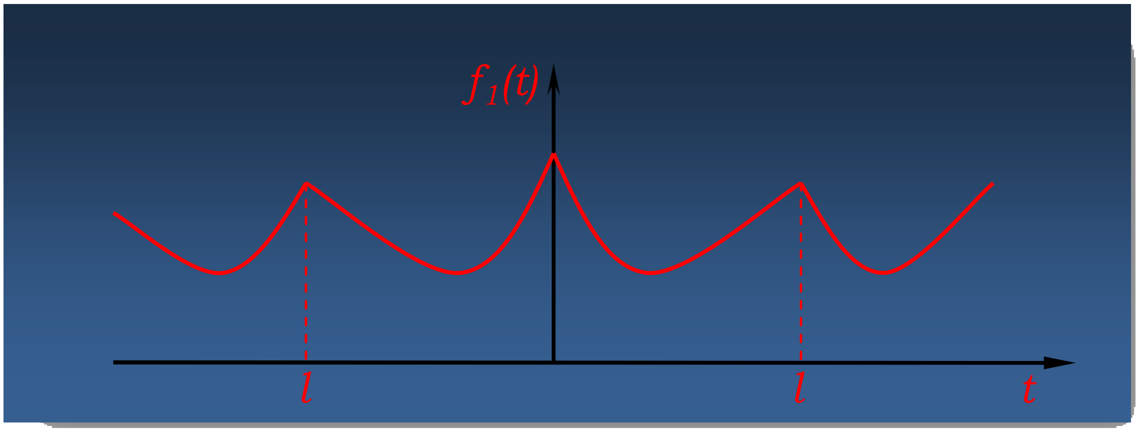
s koeficijentima:

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(t) \sin\frac{n\pi}{l} t\, dt \tag{5.4}$$

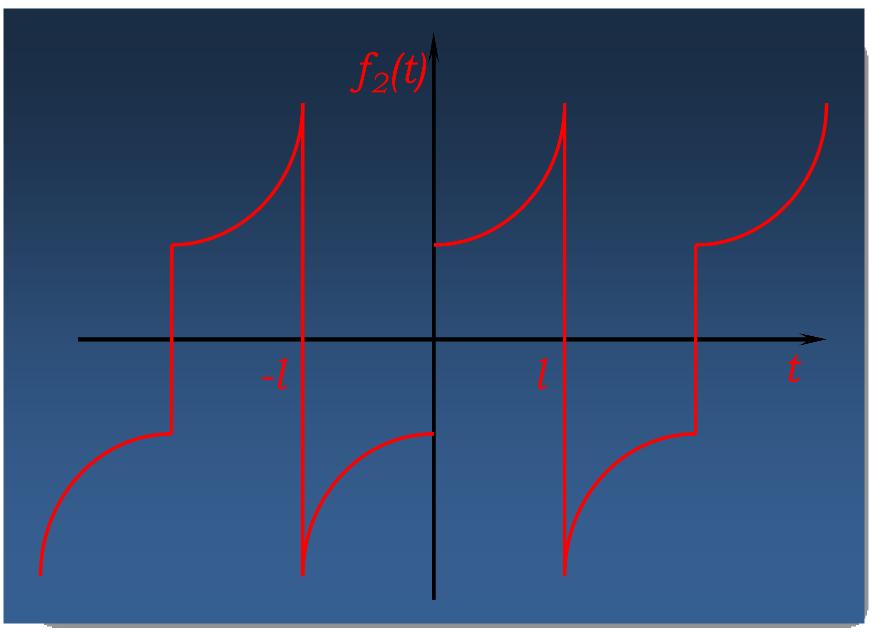
U (5.2) i (5.4) uzimaju se vrijednosti $f(t)$ između $t = 0$ i $t = l$. Dakle, za funkciju $f(t)$ danu u tom intervalu možemo formirati redove dane sa (5.1) i (5.3). Ako $f(t)$ zadovoljava uvjete Teorema 1 oba reda predstavljaju danu funkciju u intervalu $0 < t < l$. Izvan tog intervala red (5.1) predstavlja parno periodno proširenje ili nastavak funkcije f s periodom $T = 2l$, a red (5.3) predstavlja neparno periodno proširenje funkcije f. Redovi (5.1) i (5.3), s koeficijentima danim s (5.2) i (5.4), nazivaju se ***poluperiodna proširenja*** dane funkcije $f(t)$.



slika 6: Funkcija $f(t)$



slika 7: Periodno ponavljanje parne funkcije perioda $2l$



slika 8: Periodno ponavljanje neparne funkcije perioda $2l$

6. Fourierov integral

Fourierovi redovi su osnovni alat u rješavanju različitih problema, uključujući i periodne funkcije. Kako mnogi praktični problemi ne uključuju periodne funkcije poželjno je generalizirati metodu Fourierovih redova kako bi se mogla primijeniti i na neperiodne funkcije. Ako započnemo s periodnom funkcijom $f_T(x)$ s periodom T i pustimo da T neograničeno raste ($T \to \infty$), onda tako dobivena funkcija $f(x)$ nije više periodna.

Imamo funkciju $f_T(x)$ s periodom T koja se može prikazati Fourierovim redom:

$$f_T(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{T} x + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} x \right)$$

Ako uvedemo zamjenu:

$$w_n = \frac{2n\pi}{T}$$

i uvrstimo a_n i b_n iz odgovarajućih Eulerovih formula (4.2) te označavanjem integrirajuće varijable s v dobivamo:

$$f_T(x) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v) dv$$
$$+ \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos w_n x \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v) \cos w_n v \, dv + \sin w_n x \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v) \sin w_n v \, dv \right]$$

Sada je:

$$w_{n+1} - w_n = \frac{2(n+1)\pi}{T} - \frac{2n\pi}{T} = \frac{2\pi}{T}$$

odnosno,

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{2\pi}{T}$$

Tada je $\frac{2}{T} = \Delta w/\pi$, i možemo pisati Fourierov red u obliku:

$$f_T(x) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v) dv + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos(w_n x) \Delta w \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v) \cos w_n v \, dv + \sin(w_n x) \Delta w \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v) \sin w_n v \, dv \right] \quad (6.1)$$

Ovaj oblik vrijedi za svaki fiksni T proizvoljno velik ali konačan.

Sada pustimo da T neograničeno raste ($T \to \infty$) i pretpostavimo da je rezultirajuću neperiodnu funkciju:

$$f(x) = \lim_{T \to \infty} f_T(x)$$

moguće integrirati po osi x i da integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \tag{6.2}$$

postoji. Tada $1/T \to 0$ i vrijednost prvog člana na desnoj strani (6.1) približava se nuli. Nadalje, $\Delta w = 2\pi/T \to 0$ pa je prihvatljivo da beskonačni red dan sa (6.1) postane integral u granicama od 0 do ∞, koji predstavlja $f(x)$, tj.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\cos wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv\, dv + \sin wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv\, dv\right] dw \tag{6.3}$$

Ako uvedemo zamjene:

$$A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv\, dv, \qquad B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) sin \cos wv\, dv \tag{6.4}$$

Jednadžbu (6.3) možemo zapisati u obliku:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] dw \tag{6.5}$$

Ovako zapisana funkcija $f(x)$ naziva se ***Fourierov integral***.

Teorem 1: Ako je funkcija $f(x)$ po dijelovima neprekinuta u svakom konačnom intervalu i ima lijevu i desnu derivaciju u svakoj točki te integral (6.2) postoji onda se $f(x)$ može prikazati Fourierovim integralom. U točki gdje je $f(x)$ prekinuta vrijednost Fourierova integrala jednaka je prosječnoj vrijednosti lijevog i desnog limesa funkcije $f(x)$ u toj točki.

Ako je $f(x)$ parna funkcija, onda je $B(w) = 0$ u (6.4)

$$A(w) = 2 \int_0^{\infty} f(v) \cos wv\, dv \tag{6.6}$$

i (6.5) se reducira u jednostavniji oblik:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(w) \cos wx\, dw \qquad (f \text{ je parna funkcija}) \tag{6.7}$$

Ako je $f(x)$ neparna funkcija, onda je $A(w) = 0$,

$$B(w) = 2 \int_0^{\infty} f(v) \sin wv\, dv \tag{6.8}$$

i (6.5) postaje:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(w) \sin wx\, dw \qquad (f \text{ je neparna funkcija}) \tag{6.9}$$

7. Ortogonalna funkcija

$g_m(x)$ $g_n(x)$ su dvije realne funkcije definirane u intervalu $a \leq x \leq b$ i takve da integral umnoška $g_m(x)g_n(x)$ postoji u tom intervalu. Taj integral ćemo označiti sa (g_m, g_n). Ovo je jednostavni zapis koji se široko primjenjuje. Dakle,

$$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x)dx \tag{7.1}$$

Funkcije su ***ortogonalne*** u intervalu $a \leq x \leq b$ ako je integral (7.1) jednak nuli, odnosno

$$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x)dx = 0 \tag{7.2}$$

Skup realnih funkcija $g_1(x), g_2(x), g_3(x), ..$ naziva se ***ortogonalni skup*** funkcija u intervalu $a \leq x \leq b$ ako su te funkcije definirane u tom intervalu i ako svi integrali (g_m, g_n) postoje i jednaki su nuli za sve parove zasebnih funkcija u skupu.

Ne-negativni drugi korijen iz (g_m, g_m) naziva se ***norma*** funkcije $g_m(x)$ i općenito se označava sa $\|g_m\|$; dakle,

$$\|g_m\| = \sqrt{(g_m, g_m)} = \sqrt{\int_a^b g_m^2(x)dx} \tag{7.3}$$

U našem razmatranju ćemo uzeti u obzir slijedeću pretpostavku: Sve funkcije koje se javljaju su ograničene i takve da su i integrali koji se pojavljuju ograničeni i postoje, te da norme nisu jednake nuli.

Očito, ortogonalni skup $g_1, g_2, ...$ u intervalu $a \leq x \leq b$, čije funkcije imaju normu 1, zadovoljavaju odnose:

$$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x)dx \begin{cases} 0 \ za \ m \neq n & m = 1,2,... \\ 1 \ za \ m = n & n = 1,2,... \end{cases} \tag{7.4}$$

Takav skup sa naziva ***ortonormirani*** skup funkcija u intervalu $a \leq x \leq b$. Jasno je da iz ortogonalnog skupa možemo dobiti ortonormalni skup dijeljenjem svake funkcije sa svojom normom u intervalu koji se razmatra.

Iz izvoda Eulerovih formula (2.6) za Fourierove koeficijente, vidimo da smo koristili činjenicu da je skup $1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, ...$ ortogonalan na intervalu duljine $-\pi \leq x \leq \pi$. Ovo zapažanje upućuje na mogućnost predstavljanja dane funkcije $f(x)$ u uvjetima bilo kojeg drugog ortogonalnog skupa $g_1, g_2, ...$ u obliku:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \cdots \tag{7.5}$$

i određuje koeficijente $c_1, c_2, ...$ kao što je pokazano u poglavlju 2. Ako red (7.5) konvergira i predstavlja $f(x)$, naziva se ***generalizirani Fourierov red*** funkcije $f(x)$, a njegovi koeficijenti se zovu Fourierove konstante funkcije $f(x)$ s obzirom na ortogonalni skup funkcija.

Kako bi odredili te koeficijente dijelimo obje strane (7.5) sa $g_m(x)$ i integriramo u intervalu $a \leq x \leq b$ u kojem su funkcije ortogonalne; pretpostavljajući da je parcijalno deriviranje dopušteno, dobivamo:

$$\int_a^b f g_m dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b g_n g_m dx$$

Integral za koji je $n = m$ jednak je kvadratu norme $\|g_m\|$ dok su svi ostali integrali nula jer su funkcije ortogonalne. Dakle:

$$\int_a^b f g_m dx = c_m \|g_m\|^2 \tag{7.6}$$

iz čega proizlazi:

$$c_m = \frac{1}{\|g_m\|^2} \int_a^b f(x) g_m(x) dx \tag{7.8}$$

Ako je skup funkcija ortonormalan Fourierove konstante zadovoljavaju ***Besselovu nejednakost***:

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \cdots \leq \int_a^b f^2(x) dx \tag{7.9}$$

Budući da red na lijevoj strani konvergira proizlazi:

$$c_n \to 0 \qquad \text{dok } n \to \infty$$

Neki značajni skupovi realnih funkcija $g_1, g_2, \ldots$ koji se javljaju u praksi nisu ortogonalni ali imaju svojstvo da za neke funkcije $p(x)$:

$$\int_a^b p(x) g_m(x)\, g_n(x) dx = 0 \qquad \text{za } m \neq n \tag{7.10}$$

Za takav skup se kaže da je ortogonalni s obzirom na težinsku funkciju $p(x)$ u intervalu $a \leq x \leq b$. Norma od g_m tada je definirana kao:

$$\|g_m\| = \sqrt{\int_a^b p(x) g_m^2(x) dx} \tag{7.11}$$

i ako je norma svake funkcije g_m jednaka 1, skup je ortonormalni na tom intervalu s obzirom na $p(x)$.

Ako napišemo: $h_m = \sqrt{p} g_m$, onda (7.10) postaje:

$$\int_a^b h_m(x)\, h_n(x) dx = 0 \tag{7.12}$$

odnosno, funkcija h_m formira ortogonalni skup u uobičajnom smislu. Jasno, ako su ove funkcije realne, vrijednost funkcija mora biti ne-negativna.

Literatura

- E. Kreyzig, “Advanced engineering mathematics”, John Wiley & Sons Inc (1995)
- www.wikipedia.org